Відкрита студентська Олімпіада з математики
КПІ імені Ігоря Сікорського
I тур
20 січня 2021 року
Категорія А, 1 курс

1. Чи існує послідовність додатних чисел $(a_n, n \geq 1)$, для якої границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\Big)$$

є скінченною?

2. Зобразити на комплексній площині $\mathbb{C}$ множину всіх таких точок z, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\operatorname{Re} z^n \geq 0$.

3. Послідовність $(b_n, n \geq 0)$ задано рекурентним співвідношенням

$$b_{n+2} = \frac{b_{n+1}}{b_n + b_n b_{n+1}}$$

з початковими умовами $b_0 = 20$, $b_1 = 21$. Знайти b_{2021}.

4. Знайти всі неперервні на $[0,1]$ та диференційовні на $(0,1)$ функції f такі, що $f(0) = 0$ та $|f'(x)| \leq |f(x)|$ для всіх $x \in (0,1)$.

5. У просторі на відстані одна від одної розташовано дві кулі з центрами O_1 та O_2 і радіусами R_1 та R_2. Де на відрізку O_1O_2 (але зовні куль) потрібно встановити джерело світла, щоб сумарна площа освітлених частин обох сфер набула максимального значення? Відповідь подати у вигляді відношення, в якому точка розташування джерела має ділити відрізок O_1O_2.

6. Для натуральних чисел i та j позначимо через $\sigma_{i,j}$ суму їх спільних дільників:

$$\sigma_{i,j} = \sum_{i,j \,\vdots\, d} d.$$

Наприклад, $\sigma_{8,12} = 1 + 2 + 4 = 7$. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \ldots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \ldots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \ldots & \sigma_{n,n} \end{vmatrix}.$$